Mit welchen Objekten arbeitet man in der Geometrie?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Vektoren** | **Punkte** | **Geraden** | **Ebenen** |
| Kann man sich als eine Verschiebung vorstellen:  Es gibt unendlich viele Pfeile ein und desselben Vektors!  Aber nur einen Ortsvektor! | P(2|3|5)  Zum Punkt P gehört sein Ortsvektor  Aus zwei Punkten  kann man den Vektor  Bilden:  Erst Koordinaten von B hinschreiben, dann die Koordinaten von A abziehen. | Durch zwei Punkte kann man eine Gerade legen:  A(-5|4|2) und B(3|-2|1)  Mit dem Parameter t.  „**Parametergleichung**“ einer Geraden  Setzt man für t eine Zahl ein, erhält man jeweils einen Punkt, der auf der Geraden liegt:  Für t = 0 ergibt sich der Punkt A.  Für t = 1 ergibt sich der Punkt (3|-2|1) | Durch drei Punkte (nicht auf einer Geraden liegend) kann man eine Ebene legen:  A(-5|4|2) und B(3|-2|1) und C(1|0|2)    Mit den Parametern r und t.  „**Parametergleichung**“ einer Ebene  Später kommen noch hinzu:   * Normalengleichung * Koordinatengleichung * Hessesche Normalenform |

Rechnen mit Vektoren

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Addieren, Subtrahieren, Vervielfachen** | **Länge messen** | **Skalarprodukt** | **Vektor-/Kreuzprodukt** |
| Geht als ob man mit „normalen“ Zahlen rechnet.  Ein „normales“ Produkt oder einen Quotienten zweier Vektoren gibt es **nicht**!!  **Aber**: Neue Rechnungen (Skalarprodukt und Vektorprodukt) -> siehe rechts | Länge eines Vektors:  Dies ist auch der Abstand der beiden Punkte A und B. | Das **Ergebnis** ist eine **Zahl**!!  Damit prüft man, ob zwei Vektoren zueinander **senkrecht** stehen!! | Bringt als **Ergebnis** einen **Vektor**, der zu den beiden gegebenen orthogonal ist!  2 3  4 -5  -2 7  2 3  4 -5  -2 7 |

Andere Formen der Ebenengleichungen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Normalenform (NF)** | **Koordinatenform (KF)** | **Hessesche Normalenform (HNF)** |
| ist der **Stützvektor** (Ortsvektor eines Punktes der Ebene)  ist ein **Normalenvektor** (steht senkrecht auf den beiden Spannvektoren der Ebene)  Der Normalenvektor kann also mittels des Kreuzproduktes der beiden Spannvektoren aus der Parameterform berechnet werden. | Multipliziert man die Normalenform aus, erhält man die Koordinatenform:  Die KF enthält nun keine Vektoren mehr!!  **Beachte**: Man kann den Normalenvektor sofort ablesen (= die Vielfachen bei x1 usw.) | Ersetze in der Normalenform den Normalenvektor durch seinen Einheitsvektor (hat die Länge 1).  Wird benötigt, um den Abstand eines Punktes von der Ebene zu berechnen. |

Geometrische Problemstellungen

|  |  |
| --- | --- |
| **Liegt ein Punkt auf einer Geraden??** | **Liegt ein Punkt in einer Ebene?** |
| Liegt P(11|-8|0) auf g??  Setze für die Koordinaten von P ein:  11=-5+8t 16=8t t=2  -8=4-6t -12=-6t t=2  0=2-t -2=-t t=2  Somit liegt P auf g, da sich immer derselbe Wert ergibt. | Liegt P(1|-2|1) in der Ebene?  Setze die Koordinaten von P ein:  2∙1+(-2)+4∙1 = 2-2+4=4 ≠16  Somit liegt P nicht in der Ebene. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Gegenseitige Lage von Geraden** | | |
| **Die beiden Geraden sind parallel** | **Sie schneiden sich** | **Sie sind identisch** |
| Sieht man an den **Richtungs**-**vektoren**: Sie sind parallel.  Rechnerisch: Sie sind Vielfache voneinander.  Noch zu prüfen: Identisch??  Prüfe, ob der Punkt der einen Geraden auf der anderen liegt.  **Falls LGS**:  Keine Lösung: Echt parallel  Unendlich viele Lösungen: Identisch | Keine Parallelität der Richtungs-vektoren.  **LGS** **nötig**:  Genau eine Lösung!  Setze einen der beiden Parameter in die entsprechende Geraden-gleichung ein und berechne so den **Schnittpunkt** der beiden Geraden. | Ergibt sich aus den beiden Spalten links! |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Gegenseitige Lage von Ebenen (beide in KF)** | | |
| **Die beiden Ebenen sind parallel** | **Sie schneiden sich** | **Sie sind identisch** |
| Sieht man an den **Normalen**-**vektoren**: Sie sind **parallel**.  Rechnerisch: Sie sind Vielfache voneinander.  Noch zu prüfen: Identisch??  Prüfe, ob ein Punkt der einen Ebene in der anderen liegt. | Keine Parallelität der Normalen-vektoren.  **LGS** **nötig**:  Unendlich viele Lösungen.  Ergibt die **Schnittgerade**. | Ergibt sich aus den beiden Spalten links! |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen (in KF)** | | |
| **Die beiden sind parallel** | **Sie schneiden sich** | **Die Gerade liegt in der Ebene** |
| Vergleiche den **Normalenvektor** von der Ebene mit dem **Richtungsvektor** der Geraden:  Stehen diese **senkrecht** aufeinander (Skalarprodukt = 0), sind sie parallel oder identisch.  **Identisch**??  Prüfe, ob der Punkt der Geraden in der Ebene liegt.  Falls über **Gleichung** (wie rechts):  **Widersprüchliche Aussage** (wie 2=7 als Beispiel). | **Keine Orthogonalität** von Normalenvektor und Richtungs-vektor (Skalarprodukt ≠0).  Aus der Geradengleichung x1, x2 und x3 nehmen und in die Ebenen-gleichung einsetzen.  Die (lineare) Gleichung hat genau eine Lösung. Diese in die Geradengleichung einsetzen ergibt den **Schnittpunkt**. | Ergibt sich aus den beiden Spalten links!  Falls über **Gleichung** (wie links):  Gleichung **allgemein gültig** (der Parameter der Geraden fällt raus;  4=4 als Beispiel) |
|  |  |  |

**Sonderfälle**:

|  |  |
| --- | --- |
| **Gerade schneidet Ebene senkrecht**  Richtungsvektor und Normalenvektor sind parallel!! | **Ebenen schneiden sich senkrecht**  Die Normalenvektoren stehen senkrecht!!! |

**Abstände**

|  |  |
| --- | --- |
| **Punkt-Punkt** | **Punkt-Ebene** |
| A(a1|a2|a3) und B(b1|b2|b3) | Am schnellsten über die Hessesche Normalenform:  Setze für den Vektor x die Koordinaten des Punktes ein, dessen Abstand von der Ebene berechnet werden soll. |
| **Punkt-Gerade** | **Zwei windschiefe Geraden** |
| **Hilfsebenenkonstruktion**:   1. Hilfsebene H aufstellen, die orthogonal zur Geraden ist und den Punkt R enthält, dessen Abstand bestimmt werden soll: Für den Punkt und für den Richtungsvektor der Geraden einsetzen. 2. Berechne den Schnittpunkt F der Gerade mit der Hilfsebene H. 3. Den Abstand berechnen: | Seite 291 braunorangener Kasten. |