Mit welchen Objekten arbeitet man in der Geometrie?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Vektoren** | **Punkte** | **Geraden** | **Ebenen** |
| Kann man sich als eine Verschiebung vorstellen:Es gibt unendlich viele Pfeile ein und desselben Vektors!Aber nur einen Ortsvektor! | P(2|3|5)Zum Punkt P gehört sein Ortsvektor Aus zwei Punkten kann man den Vektor Bilden:Erst Koordinaten von B hinschreiben, dann die Koordinaten von A abziehen. | Durch zwei Punkte kann man eine Gerade legen:A(-5|4|2) und B(3|-2|1)Mit dem Parameter t.„**Parametergleichung**“ einer GeradenSetzt man für t eine Zahl ein, erhält man jeweils einen Punkt, der auf der Geraden liegt:Für t = 0 ergibt sich der Punkt A.Für t = 1 ergibt sich der Punkt (3|-2|1) | Durch drei Punkte (nicht auf einer Geraden liegend) kann man eine Ebene legen:A(-5|4|2) und B(3|-2|1) und C(1|0|2) Mit den Parametern r und t.„**Parametergleichung**“ einer EbeneSpäter kommen noch hinzu:* Normalengleichung
* Koordinatengleichung
* Hessesche Normalenform
 |

Rechnen mit Vektoren

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Addieren, Subtrahieren, Vervielfachen** | **Länge messen** | **Skalarprodukt** | **Vektor-/Kreuzprodukt** |
| Geht als ob man mit „normalen“ Zahlen rechnet.Ein „normales“ Produkt oder einen Quotienten zweier Vektoren gibt es **nicht**!!**Aber**: Neue Rechnungen (Skalarprodukt und Vektorprodukt) -> siehe rechts | Länge eines Vektors:Dies ist auch der Abstand der beiden Punkte A und B. | Das **Ergebnis** ist eine **Zahl**!!Damit prüft man, ob zwei Vektoren zueinander **senkrecht** stehen!! | Bringt als **Ergebnis** einen **Vektor**, der zu den beiden gegebenen orthogonal ist!2 34 -5-2 72 34 -5-2 7 |

Andere Formen der Ebenengleichungen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Normalenform (NF)** | **Koordinatenform (KF)** | **Hessesche Normalenform (HNF)** |
|  ist der **Stützvektor** (Ortsvektor eines Punktes der Ebene) ist ein **Normalenvektor** (steht senkrecht auf den beiden Spannvektoren der Ebene)Der Normalenvektor kann also mittels des Kreuzproduktes der beiden Spannvektoren aus der Parameterform berechnet werden. | Multipliziert man die Normalenform aus, erhält man die Koordinatenform:Die KF enthält nun keine Vektoren mehr!!**Beachte**: Man kann den Normalenvektor sofort ablesen (= die Vielfachen bei x1 usw.) | Ersetze in der Normalenform den Normalenvektor durch seinen Einheitsvektor (hat die Länge 1).Wird benötigt, um den Abstand eines Punktes von der Ebene zu berechnen. |

Geometrische Problemstellungen

|  |  |
| --- | --- |
| **Liegt ein Punkt auf einer Geraden??** | **Liegt ein Punkt in einer Ebene?** |
| Liegt P(11|-8|0) auf g??Setze für die Koordinaten von P ein:11=-5+8t 16=8t t=2-8=4-6t -12=-6t t=20=2-t -2=-t t=2Somit liegt P auf g, da sich immer derselbe Wert ergibt. | Liegt P(1|-2|1) in der Ebene?Setze die Koordinaten von P ein:2∙1+(-2)+4∙1 = 2-2+4=4 ≠16Somit liegt P nicht in der Ebene. |

|  |
| --- |
| **Gegenseitige Lage von Geraden** |
| **Die beiden Geraden sind parallel** | **Sie schneiden sich** | **Sie sind identisch** |
| Sieht man an den **Richtungs**-**vektoren**: Sie sind parallel.Rechnerisch: Sie sind Vielfache voneinander.Noch zu prüfen: Identisch??Prüfe, ob der Punkt der einen Geraden auf der anderen liegt.**Falls LGS**:Keine Lösung: Echt parallelUnendlich viele Lösungen: Identisch | Keine Parallelität der Richtungs-vektoren.**LGS** **nötig**:Genau eine Lösung!Setze einen der beiden Parameter in die entsprechende Geraden-gleichung ein und berechne so den **Schnittpunkt** der beiden Geraden. | Ergibt sich aus den beiden Spalten links! |

|  |
| --- |
| **Gegenseitige Lage von Ebenen (beide in KF)** |
| **Die beiden Ebenen sind parallel** | **Sie schneiden sich** | **Sie sind identisch** |
| Sieht man an den **Normalen**-**vektoren**: Sie sind **parallel**.Rechnerisch: Sie sind Vielfache voneinander.Noch zu prüfen: Identisch??Prüfe, ob ein Punkt der einen Ebene in der anderen liegt. | Keine Parallelität der Normalen-vektoren.**LGS** **nötig**:Unendlich viele Lösungen.Ergibt die **Schnittgerade**. | Ergibt sich aus den beiden Spalten links! |

|  |
| --- |
| **Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen (in KF)** |
| **Die beiden sind parallel** | **Sie schneiden sich** | **Die Gerade liegt in der Ebene** |
| Vergleiche den **Normalenvektor** von der Ebene mit dem **Richtungsvektor** der Geraden:Stehen diese **senkrecht** aufeinander (Skalarprodukt = 0), sind sie parallel oder identisch.**Identisch**??Prüfe, ob der Punkt der Geraden in der Ebene liegt.Falls über **Gleichung** (wie rechts):**Widersprüchliche Aussage** (wie 2=7 als Beispiel). | **Keine Orthogonalität** von Normalenvektor und Richtungs-vektor (Skalarprodukt ≠0).Aus der Geradengleichung x1, x2 und x3 nehmen und in die Ebenen-gleichung einsetzen.Die (lineare) Gleichung hat genau eine Lösung. Diese in die Geradengleichung einsetzen ergibt den **Schnittpunkt**. | Ergibt sich aus den beiden Spalten links!Falls über **Gleichung** (wie links):Gleichung **allgemein gültig** (der Parameter der Geraden fällt raus;4=4 als Beispiel) |
|  |  |  |

**Sonderfälle**:

|  |  |
| --- | --- |
| **Gerade schneidet Ebene senkrecht**Richtungsvektor und Normalenvektor sind parallel!! | **Ebenen schneiden sich senkrecht**Die Normalenvektoren stehen senkrecht!!! |

**Abstände**

|  |  |
| --- | --- |
| **Punkt-Punkt** | **Punkt-Ebene** |
| A(a1|a2|a3) und B(b1|b2|b3)  | Am schnellsten über die Hessesche Normalenform:Setze für den Vektor x die Koordinaten des Punktes ein, dessen Abstand von der Ebene berechnet werden soll. |
| **Punkt-Gerade** | **Zwei windschiefe Geraden** |
| **Hilfsebenenkonstruktion**: 1. Hilfsebene H aufstellen, die orthogonal zur Geraden ist und den Punkt R enthält, dessen Abstand bestimmt werden soll: Für den Punkt und für den Richtungsvektor der Geraden einsetzen.
2. Berechne den Schnittpunkt F der Gerade mit der Hilfsebene H.
3. Den Abstand berechnen:
 | Seite 291 braunorangener Kasten. |